**ESERCIZIO METODI NUMERICI**

Una barra molto lunga a sezione trapezoidale retta, ha la superficie corrispondente al lato obliquo e quella contrapposta isolate, mentre le superfici degli altri lati sono mantenute a temperatura uniforme. Il lato maggiore, di lunghezza L1=40 mm, è mantenuto a temperatura T1=60 °C e quello minore, lungo L2=20 mm, è mantenuto a T2=25 °C. L’altezza della sezione misura W=30 mm. La conducibilità termica del materiale è pari a k=5 W/m K. Dopo aver formulato il problema con le relative condizioni al contorno, usando il metodo ai volumi finiti, con un passo spaziale uniforme pari a 5 mm, valutare:

- il campo di temperatura nella sezione;

- la potenza termica che attraversa la barra per unità di lunghezza della stessa.

Si ripeta l’esercizio con una spaziatura pari a 2.5 mm e si confrontino i risultati ottenuti.

**Formulazione del problema**

Per risolvere il problema della barra mostrata in fig.1(x,y espressi in mm) si formulano alcune ipotesi che permettono di effettuare delle semplificazioni:

 si suppone il transitorio termico esaurito, di conseguenza si considera il problema in regime stazionario;

 si considera il materiale di cui è costituita la barra omogeneo ed isotropo, quindi la conducibilità termica del materiale rimane costante all’interno di esso;

 si considera un campo di temperatura bidimensionale T=T(x,y);

 si ritiene che la superficie corrispondente al lato obliquo e quella contrapposta siano isolate, mentre le superfici degli altri lati sono mantenute a temperatura uniforme.



Figura 1. Sezione barra

Il problema non presenta termini di generazione interna, quindi in questo caso l’equazione della conduzione da considerare è l’equazione di Laplace:

$\frac{∂^{2}T}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}T}{∂y^{2}}=0$ (1)

Le condizioni al contorno considerate sono:

$T\left(x,0\right)=60°C$ con $0<x<40mm$ (2)

$T\left(x,30\right)=25°C$ con $0<x<20mm$ (3)

$\frac{∂T}{∂y}\left(0,y\right)=0$ con $0<y<30mm$ (4)

$\frac{∂T}{∂y}\left(x,y\right)=0$ con $T\left(x,y\right): x=-\frac{2}{3}y+40; 20mm<x<40mm;$ $0<y<30mm$ (5)

**Soluzione con metodo ai volumi finiti**

Il dominio viene approssimato in un insieme finito di punti. Il metodo utilizzato è quello ai volumi finiti, il quale consiste nel suddividere il dominio in griglie secondo una prefissata spaziatura(nel problema in esame si considera pari a 5mm e successivamente a 2.5mm),andando così ad individuare l'insieme su cui ricavare le equazioni di bilancio. Dopo aver discretizzato il dominio si definisce,per ogni punto,un volume di controllo secondo questo criterio: scelto un punto del dominio,si trovano i punti medi che contribuiscono al bilancio termico del punto considerato e si uniscono le distanze dei punti medi

**Soluzione 1(spaziatura 5mm)**

In figura 2 è rappresentato il dominio discretizzato con spaziatura pari a 5mm



Figura 2: discretizzazione dominio con spaziatura di 5mm

Per i punti interni al dominio definiamo un volume di controllo come in figura 3.



Figura 3:volume di controllo centrato in un punto i,j interno al dominio

Scriviamo un bilancio di potenze termiche:

$$\dot{Q}\_{\left(i,j-1\right)(i,j)}+\dot{Q}\_{\left(i-1,j\right)\left(i,j\right)}+\dot{Q}\_{\left(i+1,j\right)(i,j)}+\dot{Q}\_{\left(i,j+1\right)(i,j)}=0 (6)$$

Esplicitiamo i valori delle temperature:

$$\frac{k(T\_{i,j-1}-T\_{i,j})}{Δy}Δx+\frac{k(T\_{i,j+1}-T\_{i,j})}{Δy}Δx+\frac{k(T\_{i-1,j}-T\_{i,j})}{Δx}Δy+\frac{k(T\_{i+1,j}-T\_{i,j})}{Δx}Δy=0 (7)$$

Poichè $Δx=Δy$ si ha:

$$T\_{i,j-1}-T\_{i,j}+T\_{i,j+1}-T\_{i,j}+T\_{i-1,j}-T\_{i,j}+T\_{i+1,j}-T\_{i,j}=0 (8)$$

Per i punti appartenenti all'altezza definiamo un volume di controllo come in figura 4.



Figura 4:volume di controllo per i punti appartenenti all'altezza

Scriviamo un bilancio di potenze termiche:

$\dot{Q}\_{\left(i,j-1\right)(i,j)}+\dot{Q}\_{\left(i+1,j\right)(i,j)}+\dot{Q}\_{\left(i,j+1\right)(i,j)}=0 (9)$

$\frac{k(T\_{i,j-1}-T\_{i,j})}{Δy}Δx+\frac{k(T\_{i+1,j}-T\_{i,j})}{Δx}Δy+\frac{k(T\_{i,j+1}-T\_{i,j})}{Δy}Δx=0 (10)$

Poichè $Δx=Δy$ si ha:

$$T\_{i,j-1}-T\_{i,j}+T\_{i+1,j1}-T\_{i,j}+T\_{i+1,j}-T\_{i,j}=0 (11)$$

Scriviamo le equazioni:
1) $T\_{2}-T\_{22}-2T\_{1}=0$

2) $3T\_{2}-T\_{1}-T\_{3}-T\_{24}=0$

3) $3T\_{3}-T\_{2}-T\_{4}-T\_{33}=0$

4) $3T\_{4}-T\_{3}-T\_{5}-T\_{34}=0$

5) 3$T\_{5}-T\_{4}-T\_{6}-T\_{43}=0$

6) 3$T\_{6}-T\_{5}-T\_{7}-T\_{44}=0$

7) $3T\_{7}-T\_{6}-T\_{8}-T\_{49}=0$

8) 3$T\_{8}-T\_{7}-T\_{9}-T\_{50}=0$